DOSSIER SEMANAL 7

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 1: Halla el valor de los parámetros reales a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Para poder averiguar los valores de los parámetros simplemente hemos de traducir la información proporcionada en cuatro ecuaciones.

Dado que el punto $(0, 4)$ es un máximo de la función $f(x)$ sabemos que la primera derivada cuando $x = 0$ valdrá cero:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Además, al ser un máximo sabemos que es un punto de la propia curva o función. En consecuencia cuando $x = 0$ debe cumplirse que $f(0) = 4$. Ello nos lleva a:

$$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 4 \quad \Rightarrow \quad d = 4$$

Actuando de la misma forma con el punto $(2, 0)$, sabemos que la primera derivada se anulará para $x = 2$ y por ser punto de la función debe cumplirse además que $f(2) = 0$:

$$f'(2) = 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b = 0$$

$$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 4 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\left.\begin{array}{l} 12a + 4b = 0 \\ 8a + 4b = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a + b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{array}\right\} -$$

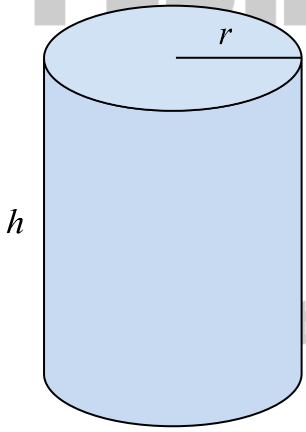
$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -3$$

Así pues, el valor de los parámetros de la función han de valer $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$ y $d = 4$. Es decir, la función adoptará la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

PROBLEMA 2: Las estaciones de GPS que se ubican sobre la superficie terrestre son útiles para la medición de los cambios que se producen en el movimiento de las placas tectónicas. El *JET Propulsion Laboratory* de la *NASA,* desea colocar en el puerto de Alicante una nueva estación con forma de cilindro recto cerrado. Para su construcción disponen de 6 m^2 de material muy ligero y maleable. Determina las dimensiones de la estación sabiendo que (por motivos mecánicos) el equipo de la NASA está interesado en que ésta disponga de la máxima capacidad posible.

Tras realizar un esquema gráfico básico de la situación propuesta en el problema observamos que para su correcta resolución necesitaremos definir dos variables:

$$r = \textit{radio de la estación cilíndrica } (en\ m)$$
$$h = \textit{altura de la estación cilíndrica } (en\ m)$$



Dado que el objetivo es maximizar la capacidad de dicha estación, necesitaremos construir y optimizar la función volumen:

$$V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Dado que nuestra función objetivo depende de dos variables, necesitaremos una condición de ligadura entre ambas que permita expresar una en función de la otra. En este caso esta relación viene determinada por la limitación del material (área) disponible:

$$A(r,h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 6 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{6 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Esto nos permite reescribir la función objetivo como sigue:

$$V(r,h)=\pi\cdot r^2\cdot h$$

$$V(r)=\pi\cdot r^2\cdot\frac{6-2\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r}\quad\Rightarrow\quad V(r)=r\cdot\left(3-\pi\cdot r^2\right)\quad\Rightarrow\quad V(r)=3r-\pi\cdot r^3$$

Ahora podemos derivar la función que nos proporciona el volumen y averiguar si de ella se desprende algún máximo:

$$V(r)=3r-\pi\cdot r^3\quad\Rightarrow\quad V'(r)=3-3\cdot\pi\cdot r^2$$

$$V'(r)=0\quad\Rightarrow\quad 3\cdot\pi\cdot r^2=3\quad\Rightarrow\quad r=\pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

Por el contexto del problema, sabemos que la solución negativa carece de sentido. Así pues comprobemos si la solución positiva se corresponde con un máximo:

	0 — $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ — $+\infty$
Signo de V'(x)	+	-
Monotonía de V(x)	$\nearrow$	$\searrow$

Por tanto, para que la estación espacial tenga el máximo volumen posible, sus dimensiones deben ser:

$$r=\sqrt{\frac{1}{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\ m$$

$$h=\frac{6-2\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{2\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}}=\frac{6-2\cdot\pi\cdot\frac{1}{\pi}}{2\cdot\pi\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}}=\frac{4}{2\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\ m$$

DOSSIER SEMANAL 7

MATEMÁTICAS II

Por Pedro A. Martínez

PROBLEMA 3: Representa gráficamente la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x}{e^x}$$

analizando previamente las características más importantes de la misma.

1. **DOMINIO**: Dado que el denominador de la función nunca se anula

$$e^x=0 \quad \Rightarrow \quad \textit{No tiene solución}$$

el dominio de $f(x)$ es todo el conjunto de los números reales.

2. **CONTINUIDAD**: La función $f(x)$ es continua por ser el cociente de dos funciones continuas siendo la que actúa como denominador una función positiva que no se anula nunca.

3. **SIMETRÍAS**: En este caso, la función no presenta ningún tipo de simetría ya que:

$$f(-x)=-\frac{x}{e^{-x}}\neq f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \textit{ no tiene simetría par}$$

$$f(-x)=-\frac{x}{e^{-x}}\neq -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \textit{ no tiene simetría impar}$$

4. **CORTES CON LOS EJES COORDENADOS**:

Corte con el eje OY: $x=0 \quad \Rightarrow \quad f(0)=\frac{0}{e^0}=\frac{0}{1}=0 \quad \Rightarrow \quad O(0,0)$

Corte con el eje OX: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad O(0,0)$

Así pues, el único punto donde la función corta a los ejes coordenados es en el origen de coordenadas $O(0,0)$.

5. **ASÍNTOTAS**:

5.1. **Asíntotas verticales**: Se buscan y estudian en aquellos puntos problemáticos respecto al dominio. Dado que en este caso el dominio de es todo el conjunto de los números reales, concluimos que no tiene asíntotas verticales.

5.2. **Asíntotas horizontales**: Para saber si una función tiene asíntotas horizontales ha de estudiarse su comportamiento en el infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\ INDETERMINACIÓN\right] = \left[\begin{matrix} Aplicando \\ L'Hôpital... \end{matrix}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{0}\right] = -\infty$$

En este caso sólo tenemos una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x\to+\infty$. Cuando $x\to-\infty$ no hay asíntota horizontal.

5.3. **Asíntotas oblicuas**: Sabemos que si una función tiene asíntota horizontal entonces no presentará asíntota oblicua. En este caso, cuando $x\to+\infty$ la función presenta una asíntota horizontal y por tanto sabemos que no habrá oblicua. Sin embargo, cuando $x\to-\infty$ no hay asíntota horizontal y por tanto cabe la posibilidad de que exista oblicua. Averigüémoslo:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

Dado que la pendiente de la asíntota oblicua no es finita, podemos asegurar que la función propuesta no posee asíntotas oblicuas.

6. **PERIODICIDAD**: La función propuesta no tiene ningún tipo de periodicidad.

7. **MONOTONÍA**: Realicemos el estudio de la primera derivada:

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x - x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\cdot(1-x)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

Igualamos la derivada a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-x}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad 1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

$$-\infty \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$$

Signo de f'(x)	+	-
Monotonía de f(x)	$\nearrow$	$\searrow$

Así pues, la función presenta un máximo absoluto en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

8. **<u>CURVATURA</u>**: Realicemos el estudio de la segunda derivada:

$$f'(x)=\frac{1-x}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f''(x)=\frac{-e^x-e^x\cdot(1-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-e^x\cdot(2-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x-2}{e^x}$$

Igualamos la segunda derivada a cero para obtener los posibles puntos de inflexión:

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{e^x}=0 \quad \Rightarrow \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Analizaremos ahora la monotonía de la función:

$$-\infty \qquad\qquad 2 \qquad\qquad +\infty$$

Signo de f''(x)	-	+
Curvatura de f(x)	$\cap$	$\cup$

Así pues, la función presenta un punto de inflexión en $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$. Es cóncava en el intervalo $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, +\infty)$.

Con toda esta información, se tiene que la representación gráfica de la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ propuesta es la que se muestra a continuación: