PROBLEMA 1: Considera la siguiente matriz cuadrada de orden 3 dada por:

$$Z(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4x^4 \\ x & 3 & x+2 \\ 1 & 1 & 4x^4+5 \end{pmatrix} \quad con\ x\in R$$

a) **Demuestra que solo existe un valor** del parámetro real x para el cual la matriz propuesta es singular.

b) **Resuelve** la ecuación matricial $I+X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1)$

c) **Calcula** el determinante de la matriz $2\cdot Z(0)\cdot\left[Z^3(1)\right]^T$

a) Para ello, primeramente deberemos calcular el determinante de la matriz $Z(x)$. Utilizaremos la regla de Sarrus pero previamente aplicaremos algunas propiedades de los determinantes para facilitar el cálculo:

$$|Z(x)|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x^4 \\ x & 3 & x+2 \\ 1 & 1 & 4x^4+5 \end{vmatrix} \underset{F3'=F3-F1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x^4 \\ x & 3 & x+2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{C3'=C3-C1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4x^4-1 \\ x & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=15-x\cdot\left(4x^4-1\right)+2-10x=-4x^5-9x+17$$

Ahora debemos demostrar que sólo existe un valor para el cual el determinante de la matriz se anula.

$$-4x^5-9x+17=0$$

Dado que se trata de una ecuación para la cual no disponemos de herramientas para su resolución, nos limitaremos a demostrar simplemente que tiene una única solución haciendo uso de los teoremas de Bolzano y Rolle estudiados con anterioridad. **Recordemos** que **el Teorema de Bolzano** dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y verifica además que $f(a)\cdot f(b)<0$ (es decir, la función toma valores de signo opuesto en los extremos) entonces existe al menos un punto que llamaremos c del intervalo abierto (a, b)donde la función $f(x)$ se anula. Expresando la tesis matemáticamente:

$$\exists c \in (a, b) \mid f(c)=0$$

Así pues, primeramente comprobaremos que posee alguna solución aplicando el Teorema de Bolzano. Para ello, definimos la función:

$$f(x)=-4x^5-9x+17$$

Podemos ver que:

- La función $f(x)$ es continua en todo R por ser un polinomio y en consecuencia será continua en cualquier intervalo cerrado que consideremos. En particular lo será en $[1, 2]$.
- Vemos que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo sugerido:

$$f(1)=-4-9+17=4>0$$
$$f(2)=-128-18+17=-129<0$$

Así pues, por el Teorema de Bolzano podemos concluir que:

$$\exists c \in (1, 2) \mid f(c)=0$$

Para demostrar que la solución es única podemos recurrir al Teorema de Rolle y el uso de la técnica de reducción al absurdo o bien, simplemente podemos realizar un estudio de la monotonía de la función $f(x)$:

$$f(x)=-4x^5-9x+17 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-20x^4-9 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -20x^4-9=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt[4]{\frac{-9}{20}} \notin R$$

Es decir, la función $f(x)$ no posee puntos críticos. Ello nos lleva a:

	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
Signo de f'(x)	$-$
Monotonia de f(x)	$\searrow$

Es decir, **la función $f(x)$ siempre es decreciente**. Así pues, la función no puede cortar más de una vez al eje OX porque una vez lo ha cortado, como continúa creciendo no hay posibilidad de que pueda volver a pasar por él.

Por todo ello, podemos asegurar que la ecuación $-4x^5-9x+17=0$ tiene una única solución, es decir, la matriz $Z(x)$ sólo es singular para un único valor real de x (que se encuentra en el intervalo $(1,2)$).

b) Resolvamos la ecuación matricial propuesta:

$$I+X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1) \quad \Rightarrow \quad X\cdot Z(0)=3\cdot Z(1)-I$$

Dado que la inversa de existe (tal como hemos comprobado en el apartado anterior) podemos post-multiplicar ambos términos de la ecuación por:

$$X\cdot Z(0)\cdot Z^{-1}(0)=[3\cdot Z(1)-I]\cdot Z^{-1}(0) \quad \Rightarrow \quad X=[3\cdot Z(1)-I]\cdot Z^{-1}(0)$$

Calculemos ahora las matrices que se requieren y obtengamos el valor de la matriz X demandada:

$$Z(1)=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&3\\1&1&9\end{pmatrix} \Rightarrow 3\cdot Z(1)-I=\begin{pmatrix}3&6&12\\3&9&9\\3&3&27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&12\\3&8&9\\3&3&26\end{pmatrix}$$

Calculemos la inversa de $Z(0)$ utilizando el procedimiento por determinantes:

$$Z(0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&2\\1&1&5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |Z(0)|=-4\cdot 0^5-9\cdot 0+17=17$$

Aplicaremos la fórmula:

$$Z^{-1}(0)=\frac{Adj^T(Z(0))}{|Z(0)|}$$

Calculamos ahora la matriz de adjuntos:

$$Adj_{11}(Z(0))=\begin{vmatrix}3&2\\1&5\end{vmatrix}=13 \qquad Adj_{12}(Z(0))=-\begin{vmatrix}0&2\\1&5\end{vmatrix}=2 \qquad Adj_{13}(Z(0))=\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}=-3$$

$$Adj_{21}(Z(0))=-\begin{vmatrix}2&0\\1&5\end{vmatrix}=-10 \qquad Adj_{22}(Z(0))=\begin{vmatrix}1&0\\1&5\end{vmatrix}=5 \qquad Adj_{23}(Z(0))=-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$Adj_{31}(Z(0))=\begin{vmatrix}2&0\\3&2\end{vmatrix}=4 \qquad Adj_{32}(Z(0))=-\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=-2 \qquad Adj_{33}(Z(0))=\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3$$

Así pues:

$$Adj(Z(0))=\begin{pmatrix}13&2&-3\\-10&5&1\\4&-2&3\end{pmatrix} \Rightarrow (Z(0))^{-1}=\frac{Adj^T((Z(0)))}{|(Z(0))|}=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}13&-10&4\\2&5&-2\\-3&1&3\end{pmatrix}$$

Sustituyendo ahora en la expresión de la matriz X obtenemos:

$$X = [3\cdot Z(1) - I]\cdot Z^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 9 \\ 3 & 3 & 26 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -10 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 22 & 32 \\ 28 & 19 & 23 \\ -33 & 11 & 84 \end{pmatrix}$$

c) Para calcular el determinante de la matriz propuesta, simplemente recurriremos a la utilización de algunas de las propiedades básicas de los determinantes para así facilitarnos el cálculo y ahorrar tiempo:

$$\left|2\cdot Z(0)\cdot\left[Z^3(1)\right]^T\right| = 2^3\cdot|Z(0)|\cdot\left|Z^3(1)\right| = 8\cdot 17\cdot|Z(1)|^3$$

Como:

$$|Z(1)| = -4\cdot 1^5 - 9\cdot 1 + 17 = 4$$

Tenemos que:

$$\left|2\cdot Z(0)\cdot\left[Z^3(1)\right]^T\right| = 8\cdot 17\cdot 4^3 = 34816$$

PROBLEMA 2: Considérense los puntos A (1,2,1) y B (-1,1,0) . Determina, en cada caso, la ecuación del objeto geométrico requerido:

a) **Ecuación general del plano** que pasa por el punto A y es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$

b) **Ecuación general del plano** que contiene a la recta $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+5z=-2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+8}{4}$

c) **Ecuación paramétrica del plano** que es perpendicular al eje Z y pasa por el punto de corte de las rectas $x-1=y-2=\dfrac{z-1}{2}$ y $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

d) **Ecuación de la recta (como intersección de dos planos)** que pasa por el punto A y es paralela a la recta $x-1=\dfrac{y}{2}=2-z$

e) **Ecuación continua de la recta** que pasa por el punto B y es paralela a los planos $x-2y+5z-1=0$ y $2x+3y-z+2=0$

a) Queremos determinar la ecuación de un plano. Por tanto necesitaremos **un punto y dos vectores directores** o bien, **un punto y un vector normal** al plano. En este caso se observa que la opción más rápida consiste en construir el plano a partir de un punto y un vector normal. Dado que el plano a calcular es paralelo al plano $x-2y+5z-1=0$ concluimos que ambos tendrán el mismo vector normal (obsérvese la figura 1 adjunta). Así pues la ecuación general del plano que buscamos será de la forma:

$$x-2y+5z+D=0$$

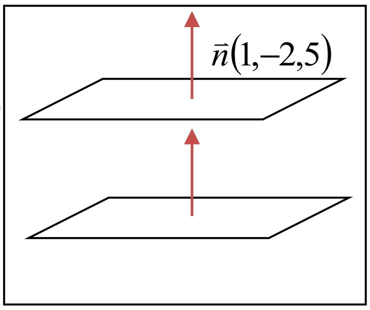

Figura 1

Para calcular el valor del término independiente D, lo que haremos será forzar al plano a pasar por el punto A (1,2,1) indicado. Para ello simplemente hemos de sustituir las coordenadas de dicho punto en la ecuación del plano:

$$1-2\cdot 2+5\cdot 1+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-2$$

Por tanto, la ecuación del plano buscado es:

$$\boxed{x-2y+5z-2=0}$$

b) En esta ocasión, para determinar la ecuación del plano, es más sencillo utilizar un **punto y dos vectores directores**. De la primera recta nos interesa extraer un punto (por el que tendrá que pasar el plano deseado) y un vector director. Así pues dispondremos la ecuación de la recta en su forma paramétrica. Para ello resolveremos el sistema compatible indeterminado que constituyen las ecuaciones proporcionadas utilizando un parámetro real λ:

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+5z=-2 \end{cases} \overset{z=\lambda}{\Rightarrow} \begin{cases} x-2y=\lambda \\ 2x+y=-2-5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=-2\lambda \\ \quad 2x+y=-2-5\lambda \end{cases}$$

$$5y=-2-7\lambda$$

Como $y=\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}\lambda \quad \Rightarrow \quad x=\lambda+2\left(\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}\lambda\right)=-\frac{4}{5}-\frac{9}{5}\lambda$

Por tanto la ecuación paramétrica de la primera recta (la que debe contener el plano) será:

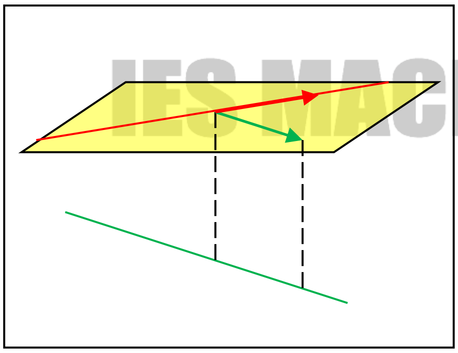

Figura 2

$$\begin{cases} x=-\frac{4}{5}-\frac{9}{5}\lambda \\ y=\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda\in\Re$$

Así pues, a la vista de la ecuación podemos decir que un punto y un vector director de la recta serán:

$$P\left(-\frac{4}{5},-\frac{2}{5},0\right) \qquad \vec{u}\left(-\frac{9}{5},-\frac{7}{5},1\right)$$

Este punto y vector serán también punto y vector director del plano (ver figura 2). Dado que se trata de obtener la ecuación de un plano (y no queremos calcular distancias ni propiedades métricas) podemos considerar un vector paralelo al extraído que sea más manejable, sin fracciones:

$$\vec{u}\left(-\frac{9}{5},-\frac{7}{5},1\right) \equiv \vec{u}(-9,-7,5)$$

Para poder escribir la ecuación del plano ya sólo nos queda obtener un vector director más, pero resulta que el vector director de la segunda recta dada es también director del plano por ser paralelo a la misma. Así pues:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+8}{4} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(2,-1,4)$$

Ya podemos escribir la ecuación general del plano haciendo uso de un determinante:

$$\begin{vmatrix} x+\frac{4}{5} & y+\frac{2}{5} & z \\ -9 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad -23\left(x+\frac{4}{5}\right)+46\left(y+\frac{2}{5}\right)+23z=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\left(x+\frac{4}{5}\right)+2\left(y+\frac{2}{5}\right)+z=0 \quad \Rightarrow \quad -x-\frac{4}{5}+2y+\frac{4}{5}+z=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-x+2y+z=0}$$

c) En primer lugar calcularemos el punto de intersección de las dos rectas dadas. Para ello simplemente hemos de resolver el sistema generado por ambas ecuaciones. Con la finalidad de no complicar en exceso la resolución de dicho sistema, lo que haremos será disponer una de las rectas en forma paramétrica y a continuación sustituir en la ecuación de la otra recta:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \Re$$

Sustituyendo en la ecuación de la otra recta, obtenemos:

$$x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \quad \Rightarrow \quad (3-2\lambda)-1=(3-\lambda)-2=\frac{(-1+2\lambda)-1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$2-2\lambda=1-\lambda=-1+\lambda \quad \Rightarrow 1-\lambda=-1+\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda=1$$

Sustituimos ahora el valor de $\lambda=1$ en la ecuación paramétrica y obtenemos el punto:

$$\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad con\ \lambda \in \Re \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-1=2 \\ z=-1+2\cdot 1=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P(1,2,1)$$

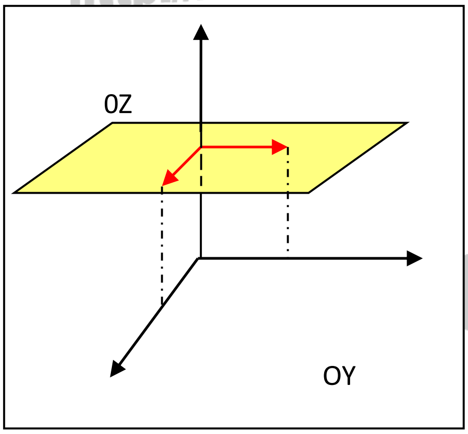

Figura 3

Una vez disponemos del punto de intersección de ambas rectas, sólo queda determinar un vector normal al plano o dos vectores directores. En este caso, resulta sencillo realizar cualquiera de las dos opciones. Dado que nos piden la ecuación paramétrica del plano, será más cómodo determinar dos vectores directores. Como el plano es perpendicular al eje 0Z y sabemos que dos de sus vectores directores son $\vec{i}(1,0,0)$ y $\vec{j}(0,1,0)$ (ver figura 3):

$$\boxed{\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\mu \quad con\ \lambda, \mu \in \Re \\ z = 1 \end{cases}}$$

d) Dado que la recta que nos piden es paralela a:

$$x-1=\frac{y}{2}=2-z$$

Ambas tendrán el mismo vector director:

$$x-1=\frac{y}{2}=2-z \quad \Rightarrow \quad x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}(1,2,-1)$$

Así pues, sabiendo que pasa por el punto A (1,2,1), la ecuación continua de la recta será:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

Para ponerla como intersección de dos planos simplemente hemos de considerar por separado dos de las igualdades de la ecuación continua:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2} \\ \frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2=y-2 \\ -y+2=2z-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} 2x-y=0 \\ y+2z-4=0 \end{cases}}$$

e) En este caso, ya tenemos el punto por donde ha de pasar la recta cuya ecuación queremos obtener. Sólo necesitaremos un vector director. Para ello basta observar que el vector director de la recta es perpendicular a los vectores normales de los dos planos a los que la recta es paralela (ver figura 4). Así pues, multiplicando vectorialmente los vectores normales de los dos planos obtendremos el director de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+5z-1=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_1(1,-2,5) \\ 2x+3y-z+2=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_2(2,3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{d}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-13,11,7)$$

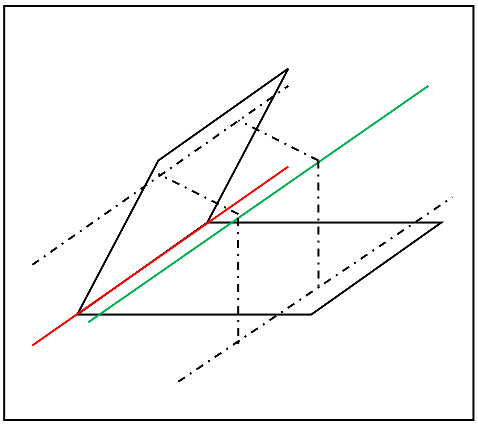

Figura 4

Así pues, la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\boxed{\frac{x+1}{-13}=\frac{y-1}{11}=\frac{z}{7}}$$